差分方程的 z 域求解详解

问题描述

已知差分方程：

$$y[n] = by[n-1] + x[n] \tag{1}$$

其中输入信号为：

$$x[n] = a^n u[n] \tag{2}$$

初始条件：$y[-1] = 2$

求：完整解 $y[n]$，包括零输入响应和零状态响应。

1 z 域单边时移性质

1.1 基本性质说明

z 域单边变换的时移性质是求解含初始条件的差分方程的关键工具。

z 域单边时移性质

右移性质（延时）：

$$\mathcal{Z}\{f[n-1]\} = z^{-1}F(z) + f[-1] \tag{3}$$

一般形式（右移 k 步）：

$$\mathcal{Z}\{f[n-k]\} = z^{-k}F(z) + \sum_{m=1}^{k} f[-m]z^{-k+m} \tag{4}$$

2 本题 z 域变换与变形

2.1 对差分方程取 z 变换

将原差分方程改写为 $y[n] - by[n-1] = x[n]$，并对方程两边取单边 z 变换：

$$Y(z) - b[z^{-1}Y(z) + y[-1]] = X(z) \tag{5}$$

2.2 代入初始条件和输入

将 $y[-1]=2$ 和 $X(z)=\mathcal{Z}\{a^n u[n]\}=\frac{z}{z-a}$ 代入：

$$Y(z)-b[z^{-1}Y(z)+2]=\frac{z}{z-a} \tag{6}$$

2.3 整理求解 Y(z)

$$Y(z)-bz^{-1}Y(z)-2b=\frac{z}{z-a} \tag{7}$$

$$Y(z)(1-bz^{-1})=2b+\frac{z}{z-a} \tag{8}$$

$$Y(z)\cdot\frac{z-b}{z}=2b+\frac{z}{z-a} \tag{9}$$

$$Y(z)=\left(2b+\frac{z}{z-a}\right)\frac{z}{z-b} \tag{10}$$

2.4 分离零状态响应和零输入响应

$$Y(z)=\frac{2bz}{z-b}+\frac{z^2}{(z-a)(z-b)} \tag{11}$$

零输入与零状态响应

零输入响应（Zero-Input Response）：$Y_{zi}(z)$

$$Y_{zi}(z)=\frac{2bz}{z-b} \tag{12}$$

仅由初始条件 $y[-1]=2$ 引起。

零状态响应（Zero-State Response）：$Y_{zs}(z)$

$$Y_{zs}(z)=\frac{z^2}{(z-a)(z-b)} \tag{13}$$

仅由输入 $x[n]$ 引起，假设初始条件为零。

3 求解零输入与零状态响应

3.1 零输入响应的反变换

$$Y_{zi}(z)=\frac{2bz}{z-b}=(2b)\cdot\frac{z}{z-b} \tag{14}$$

利用基本变换对 $\mathcal{Z}\{p^n u[n]\} = \frac{z}{z-p}$，可得：

$$\boxed{y_{zi}[n] = 2b \cdot (b^n u[n]) = 2b^{n+1} u[n]} \tag{15}$$

3.2 零状态响应的反变换（部分分式展开法）

为方便反变换，对 $\frac{Y_{zs}(z)}{z}$ 进行展开：

$$\frac{Y_{zs}(z)}{z} = \frac{z}{(z-a)(z-b)} \tag{16}$$

3.2.1 情况 1: $a \neq b$

$$\frac{z}{(z-a)(z-b)} = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b} \tag{17}$$

使用留数法（Cover-up Method）求系数：

$$A = (z-a)\frac{z}{(z-a)(z-b)}\bigg|_{z=a} = \frac{a}{a-b}$$
$$B = (z-b)\frac{z}{(z-a)(z-b)}\bigg|_{z=b} = \frac{b}{b-a}$$

因此：

$$Y_{zs}(z) = z\left(\frac{a/(a-b)}{z-a} + \frac{b/(b-a)}{z-b}\right) = \frac{a}{a-b}\frac{z}{z-a} - \frac{b}{a-b}\frac{z}{z-b} \tag{18}$$

进行 z 反变换得到：

$$\boxed{y_{zs}[n] = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} u[n]} \tag{19}$$

3.2.2 情况 2: $a = b$

此时 $Y_{zs}(z) = \frac{z^2}{(z-a)^2}$。利用变换对 $\mathcal{Z}\{(n+1)p^n u[n]\} = \frac{z^2}{(z-p)^2}$，可直接得到：

$$\boxed{y_{zs}[n] = (n+1)a^n u[n]} \tag{20}$$

4 完整解

完整响应为 $y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n]$。

最终结果

当 $a \neq b$ 时：

$$\boxed{y[n] = \left(2b^{n+1} + \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}\right) u[n]} \tag{21}$$

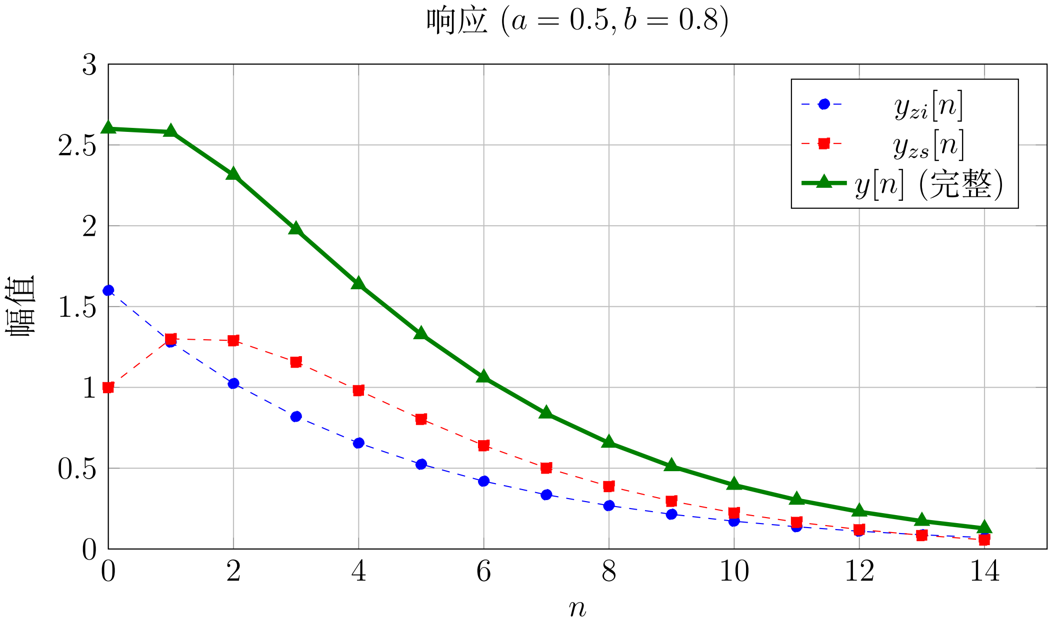
当 $a = b$ 时：

$$y[n] = 2a^{n+1}u[n] + (n+1)a^n u[n] = \boxed{(2a + n + 1)a^n u[n]} \tag{22}$$

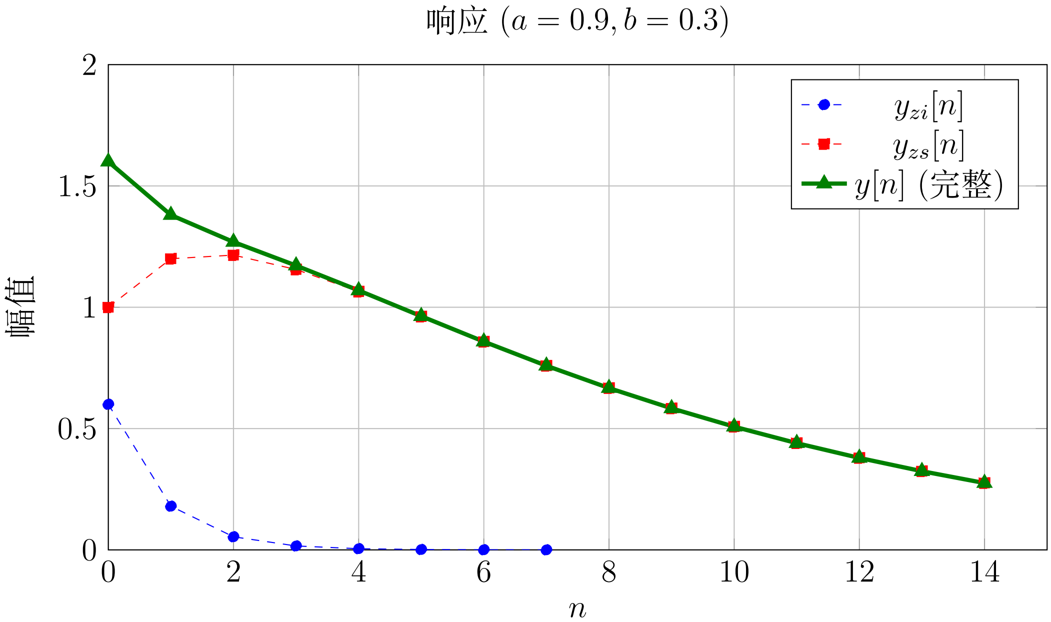
5 时域波形图

下面给出不同参数下的时域响应波形。

5.1 情况 1：$a = 0.5, b = 0.8$



5.2 情况 2：$a = 0.9, b = 0.3$



6 验证与总结

6.1 时域直接验证（以 $n = 0$ 为例）

我们可以通过对比差分方程的直接计算结果和我们解出的表达式在 $n = 0$ 处的值，来验证解的正确性。

1. 从原差分方程计算： 在 $n = 0$ 时：

$$y[0] = b \cdot y[-1] + x[0] = b \cdot 2 + a^0 u[0] = 2b + 1 \tag{23}$$

2. 从最终解的表达式计算（$a \neq b$）**：**

$$y[0] = 2b^{0+1} + \frac{a^{0+1} - b^{0+1}}{a - b} = 2b + \frac{a - b}{a - b} = 2b + 1 \tag{24}$$

两种方法计算出的 $y[0]$ 完全一致，证明我们的求解是正确的。

6.2 关键要点总结

1. **z 域时移性质**是求解含初始条件差分方程的核心工具。
2. 零输入响应 $y_{zi}[n]$ 仅由初始条件引起，零状态响应 $y_{zs}[n]$ 仅由输入信号引起，总响应是两者之和。
3. **部分分式展开法**是求有理分式 z 反变换的常用且有效的方法。

4. 必须仔细进行 z 反变换，特别是注意常数项系数，如 $Y_{zi}(z)$ 反变换为 $2b^{n+1}u[n]$ 而非 $2b^n u[n]$。

5. 在求解完成后，通过代入 $n = 0, 1, \ldots$ 等初始值进行时域验证，是检查结果正确性的好习惯。

6. 当 $a = b$ 时（重极点情况），需要使用不同的变换对或展开形式进行处理。

附录：常用 z 变换对

时域信号	z 域变换	收敛域
$\delta[n]$	1	全 z 平面
$u[n]$	$\frac{z}{z-1}$	$\|z\| > 1$
$a^n u[n]$	$\frac{z}{z-a}$	$\|z\| > \|a\|$
$na^n u[n]$	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$\|z\| > \|a\|$
$(n+1)a^n u[n]$	$\frac{z^2}{(z-a)^2}$	$\|z\| > \|a\|$
$\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{z(z-\cos\omega_0)}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$	$\|z\| > 1$
$\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{z\sin\omega_0}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$	$\|z\| > 1$