Z 变换综合应用习题

习题一：稳定谐振系统的全面分析

一个因果 LTI 系统由以下差分方程描述：

$$y[n] - y[n-1] + 0.5y[n-2] = x[n] - x[n-1]$$

请对该系统进行全面分析：

1. 求出系统函数 $H(z)$。
2. 计算系统的零极点，并在 Z 平面上绘制零极点图。
3. 判断系统的稳定性，并说明理由。
4. 求解系统的冲激响应 $h[n]$，并绘制其大致波形。
5. **频率响应分析**:
   - **谐振频率**: 对于有靠近单位圆的复数极点的系统，其幅度响应会在极点幅角对应的频率附近出现一个峰值，这个频率称为谐振频率。请问该系统的谐振频率大约是多少?
   - 根据系统的频率响应特性，绘制其幅度谱的大致形状，并判断其属于哪种类型的滤波器（如低通、高通、带通等）。

习题二：根据系统特性反求系统模型

一个稳定的因果 LTI 系统具有以下特性：

- 系统在 Z 平面 $z = -1$ 处有一个零点。
- 系统在 $z = 0.8$ 处有一个极点。
- **直流增益**: 系统的直流增益是指系统对零频率输入（即恒定输入信号）的稳态响应放大倍数，其数值等于系统函数在 $z = 1$ 处的值 $H(1)$。已知该系统的直流增益为 20。

请完成以下任务：

1. 根据以上信息，确定系统的系统函数 $H(z)$ 并绘制其零极点图。
2. 写出描述该系统的差分方程。
3. 求该系统的冲激响应 $h[n]$ 并绘制其波形。

解题参考

习题一解答

1. 求解系统函数 H(z)

对差分方程两边进行 Z 变换：

$$Y(z) - z^{-1}Y(z) + 0.5z^{-2}Y(z) = X(z) - z^{-1}X(z)$$

$$Y(z)(1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}) = X(z)(1 - z^{-1})$$

因此，系统函数 $H(z)$ 为：

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}} = \frac{z(z-1)}{z^2 - z + 0.5}$$

2. 零极点分析

- **零点**: 令分子 $z(z-1) = 0$，得到 $z_1 = 0, z_2 = 1$。
- **极点**: 令分母 $z^2 - z + 0.5 = 0$。解得 $p_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-2}}{2} = \frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2}$。

极点的极坐标形式为 $p = re^{j\theta}$，其中：

- **模** $r = |\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{0.5} \approx 0.707$。
- **幅角** $\theta = \arctan(\frac{1/2}{1/2}) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$。

所以，极点为 $p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\pi/4}$ 和 $p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\pi/4}$。

习题一：零极点图

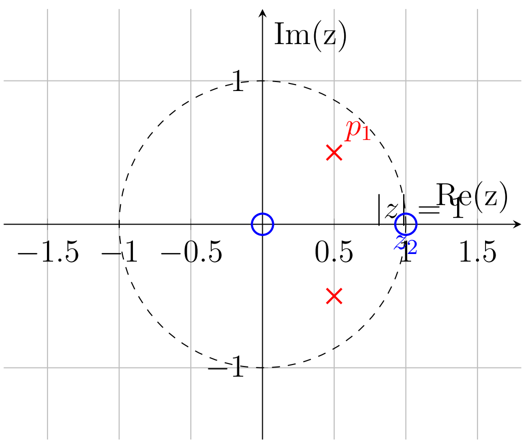

图 1: 系统零极点分布图。

3. 稳定性判断

系统的极点模为 $|p| = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707 < 1$。由于所有极点都在单位圆内部，且系统是因果的，所以 **该系统是稳定的**。

4. 求解冲激响应 h[n]

冲激响应是衰减的振荡序列。其通用形式为 $h[n] = 2|A|r^n \cos(\theta n + \angle A)u[n]$。通过部分分式展开（过程略），可求得：

$$h[n] = (\sqrt{0.5})^n \cos(\frac{\pi}{4}n)u[n]$$

这是一个由 $(\sqrt{0.5})^n$ 包络衰减的余弦信号，振荡角频率为 $\pi/4$。

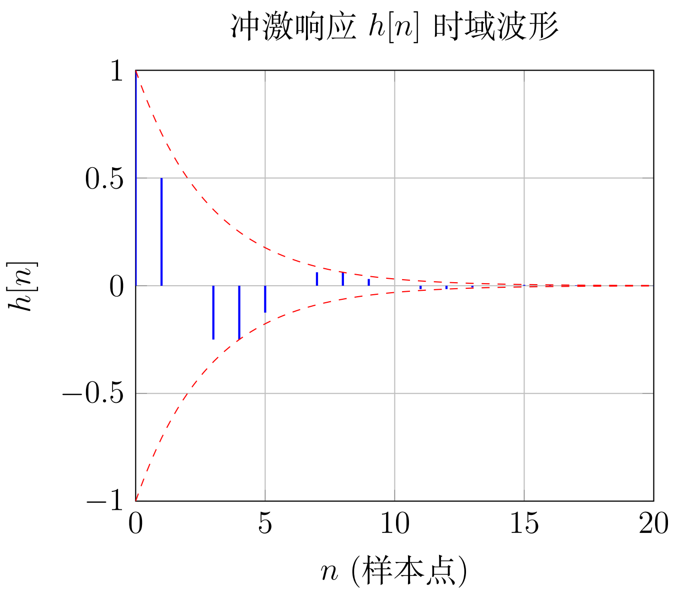

图 2: $h[n]$ 是一个衰减的余弦序列。

5. 频率响应与滤波器类型分析

- **谐振频率**: 系统的谐振频率由极点的幅角决定，即 $\omega_{\text{res}} \approx \theta = \frac{\pi}{4}$ rad/sample。
- **滤波器类型**: 系统在 $z = 1$（对应直流 $\omega = 0$）处有一个零点，所以 $H(1) = 0$，系统完全抑制直流分量。谐振峰出现在 $\omega = \pi/4$ 处。综合来看，系统抑制低频，在某个中间频率处有峰值，因此它是一个 **带通滤波器 (Band-pass Filter)**。

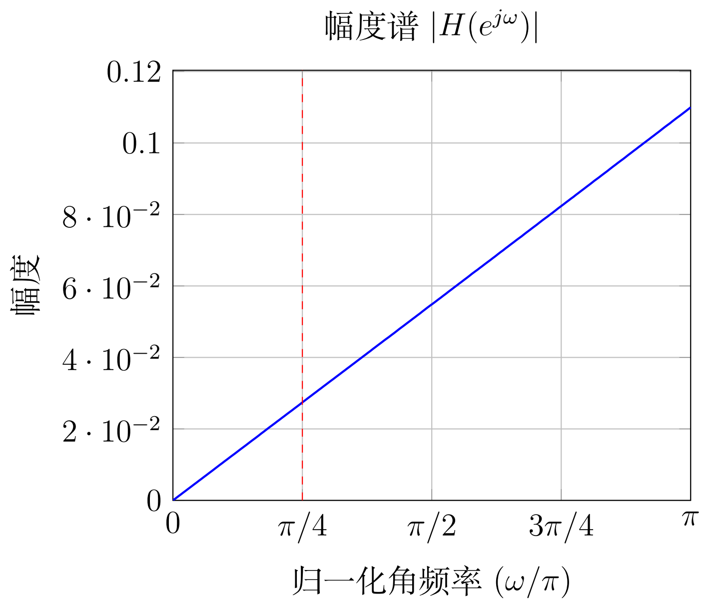

图 3: 带通滤波器的幅度响应特性。

习题二解答

1. 确定系统函数 H(z) 及零极点图

根据题目信息构建系统函数 $H(z) = K\frac{\text{零点项}}{\text{极点项}}$。

- **零点**: 在 $z = -1$ 处，对应分子项 $(z + 1)$。
- **极点**: 在 $z = 0.8$ 处，对应分母项 $(z - 0.8)$。

系统函数的形式为:

$$H(z) = K\frac{z + 1}{z - 0.8}$$

利用直流增益 $H(1) = 20$ 求解 K:

$$H(1) = K\frac{1 + 1}{1 - 0.8} = K\frac{2}{0.2} = 10K$$

令 $10K = 20$，解得 $K = 2$。最终的系统函数为:

$$H(z) = \frac{2(z + 1)}{z - 0.8}$$

2. 写出差分方程

将 $H(z)$ 写成 z 的负幂次形式:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2(1 + z^{-1})}{1 - 0.8z^{-1}} = \frac{2 + 2z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}}$$

习题二：零极点图

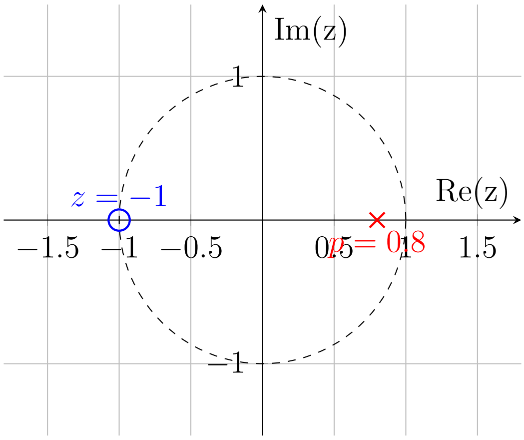

图 4: 一阶系统零极点分布图。

交叉相乘：

$$Y(z)(1 - 0.8z^{-1}) = X(z)(2 + 2z^{-1})$$

$$Y(z) - 0.8z^{-1}Y(z) = 2X(z) + 2z^{-1}X(z)$$

进行逆 Z 变换，得到差分方程：

$$y[n] - 0.8y[n-1] = 2x[n] + 2x[n-1]$$

3. 求冲激响应 h[n] 及波形

为了求逆变换，我们将 $H(z)$ 进行变形。使用长除法或部分分式思想：

$$H(z) = \frac{2z+2}{z-0.8} = \frac{2(z-0.8)+1.6+2}{z-0.8} = 2 + \frac{3.6}{z-0.8}$$

为了匹配 Z 变换表，我们调整第二项：

$$H(z) = 2 + 3.6z^{-1}\frac{z}{z-0.8}$$

进行逆 Z 变换：

- 2 的逆变换是 $2\delta[n]$。
- $3.6\frac{z}{z-0.8}$ 的逆变换是 $3.6(0.8)^n u[n]$。
- z^{-1} 对应时域延迟一个单位。

所以，冲激响应为：

$$h[n] = 2\delta[n] + 3.6(0.8)^{n-1}u[n-1]$$

这是一个在 $n = 0$ 处有冲激，之后按指数 0.8^n 衰减的序列。

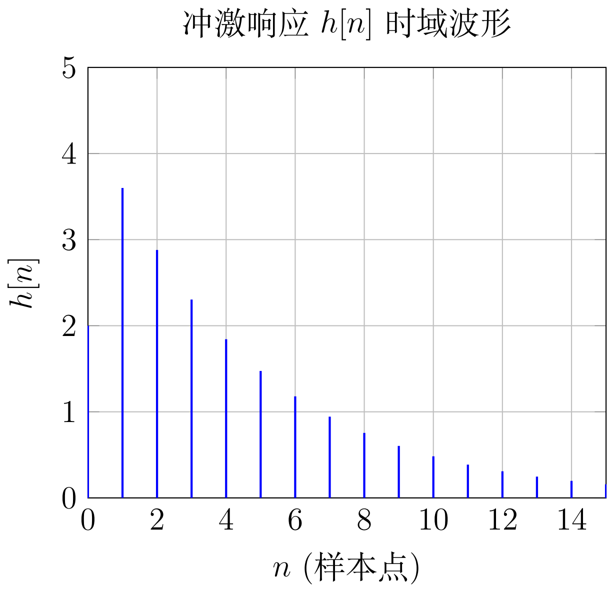

图 5: $h[n]$ 在 $n = 0$ 有一个冲激，随后指数衰减。