目录

1 矩形脉冲信号的 DTFT 分析

本章将详细推导离散时间矩形脉冲信号 $R_N[n]$ 的 DTFT。我们将从一个具体的例子 $N=4$ 出发，展示两种计算方法：一种是适用于**任何**有限长度序列的通用方法（多项式展开），另一种则是利用该序列幅度恒定的特性而采用的特殊方法（等比数列求和）。

1.1 信号与 DTFT 定义

首先，我们回顾一下矩形脉冲信号 $R_N[n]$ 和 DTFT 的定义：

$$R_N[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{1}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \tag{2}$$

1.2 以 N=4 为例的推导

对于 $N=4$，信号为 $R_4[n] = \{1,1,1,1\}$，仅在 $n=0,1,2,3$ 处有非零值。

1.2.1 方法一：通用方法（多项式展开）

任何有限长度序列的 DTFT 都可以通过直接展开求和得到。这种方法不要求序列的值有任何特殊规律，具有普遍适用性：

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{3} R_4[n]e^{-j\omega n} \\ &= 1 \cdot e^{-j\omega \cdot 0} + 1 \cdot e^{-j\omega \cdot 1} + 1 \cdot e^{-j\omega \cdot 2} + 1 \cdot e^{-j\omega \cdot 3} \\ &= 1 + e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} + e^{-j3\omega} \end{aligned} \tag{3}$$

这个结果是一个关于 $e^{-j\omega}$ 的四项多项式，它是完全正确的 DTFT 表达式，可以直接用于数值计算。

1.2.2 方法二：特殊方法（等比数列求和）

我们观察到 $R_4[n]$ 的特殊性：它的非零值**恒为 1**。这使得式 (3) 恰好构成一个公比为 $r = e^{-j\omega}$ 的**等比数列**。因此，我们可以利用等比数列求和公式 $S_N = a\frac{1-r^N}{1-r}$ 来进行化简：

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1 \cdot (1 - (e^{-j\omega})^4)}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{1 - e^{-j4\omega}}{1 - e^{-j\omega}} \tag{4}$$

两种方法的结果完全等价，这清晰地表明，特殊方法是通用方法在特定条件下的一种高效简化。

1.3 推广至任意 N 与最终形式

将特殊方法推广到任意长度 N，我们得到：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}}$$

为了更直观地分析其幅度和相位，我们通常对上式进行变形。这里的核心技巧是提取中心点的相位因子，并巧妙地运用欧拉公式 $e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\sin(\theta)$。

1. **处理分子**:

$$\begin{aligned} 1-e^{-j\omega N} &= e^{-j\omega N/2}(e^{j\omega N/2} - e^{-j\omega N/2}) \\ &= e^{-j\omega N/2} \cdot \left(2j\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

2. **处理分母**:

$$\begin{aligned} 1-e^{-j\omega} &= e^{-j\omega/2}(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}) \\ &= e^{-j\omega/2} \cdot \left(2j\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

3. **合并化简**:

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \frac{e^{-j\omega N/2} \cdot \cancel{2j} \cdot \sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{e^{-j\omega/2} \cdot \cancel{2j} \cdot \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \\ &= e^{-j\omega(N/2-1/2)} \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \end{aligned}$$

最终,我们得到矩形脉冲 DTFT 的标准形式,这个形式也被称为**狄利克雷核函数 (Dirichlet Kernel)**：

$$\mathbf{X(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}} \tag{5}$$

这个封闭形式极大地便利了我们对幅度谱和相位谱的理论分析。

2 N=4 时的静态可视化与理论解释

本章将基于上一章推导出的 DTFT 公式，对 $N = 4$ 的情况进行可视化和深入分析。

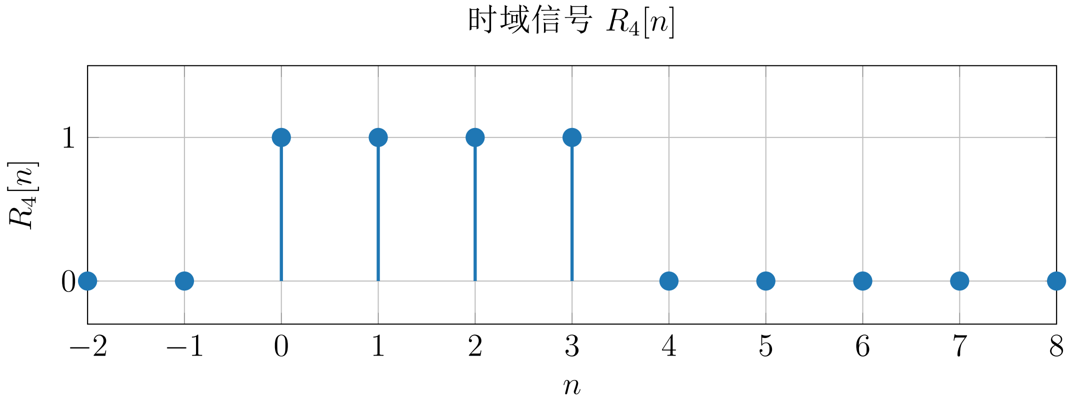

图 1: N=4 的矩形脉冲信号。

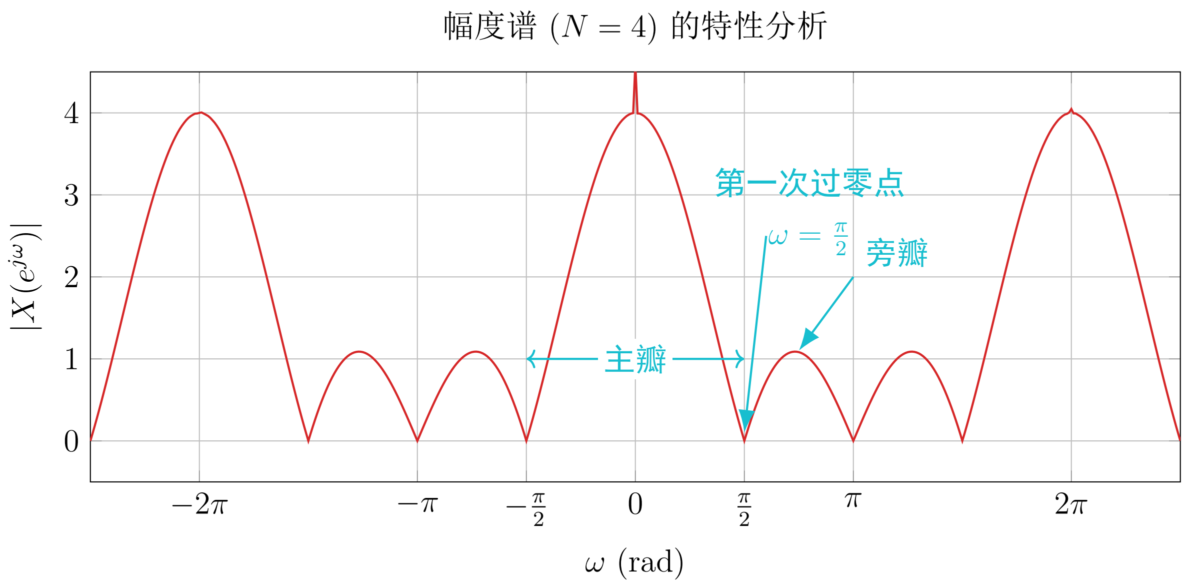

图 2: N=4 的幅度谱，其关键特征在下文详述。

2.1 对图2的理论解释

图 2 中展示的两个核心特征——峰值和第一次过零点，都可以从 DTFT 公式中严格推导出来。

2.1.1 峰值为 N=4 的理解（直流增益）

幅度谱的峰值出现在频率 $\omega = 0$ 处。当 $\omega \to 0$ 时，DTFT 的幅度部分是一个 $\frac{0}{0}$ 的不定式，我们可以使用**洛必达法则**来求其极限：

$$\lim_{\omega\to 0}\left|\frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right| = \lim_{\omega\to 0}\left|\frac{\frac{N}{2}\cos\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right| = \left|\frac{N/2}{1/2}\right| = N$$

因此，峰值总是等于 N。对于 $N = 4$ 的情况，峰值就是 **4**。从物理意义上讲，$\omega = 0$ 处的 DTFT 值等于信号所有样本点之和，即 $1+1+1+1 = 4$，这代表了信号的直流分量。

2.1.2 第一次过零点在 $\omega = 2\pi/N = \pi/2$ 的理解

幅度谱的零点发生在分子 $\sin(\frac{\omega N}{2}) = 0$ 且分母 $\sin(\frac{\omega}{2}) \neq 0$ 的位置。

- **分子为零的条件：** $\frac{\omega N}{2} = k\pi \implies \omega = \frac{2k\pi}{N}$，其中 k 为非零整数。
- **分母不为零的限制：** 要求 k 不能是 N 的整数倍（因为那样会导致分母也为零）。

对于 $N = 4$，零点位置为 $\omega = \frac{k\pi}{2}$。我们要寻找的**第一次**过零点对应最小的正整数 $k = 1$，此时：

$$\omega_1 = \frac{1\cdot\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

这个位置决定了主瓣的宽度（从 $-\frac{\pi}{2}$ 到 $\frac{\pi}{2}$），主瓣总宽度为 $\frac{4\pi}{N} = \pi$。这揭示了时频对偶性：时域脉冲越宽（N 越大），频域主瓣就越窄。

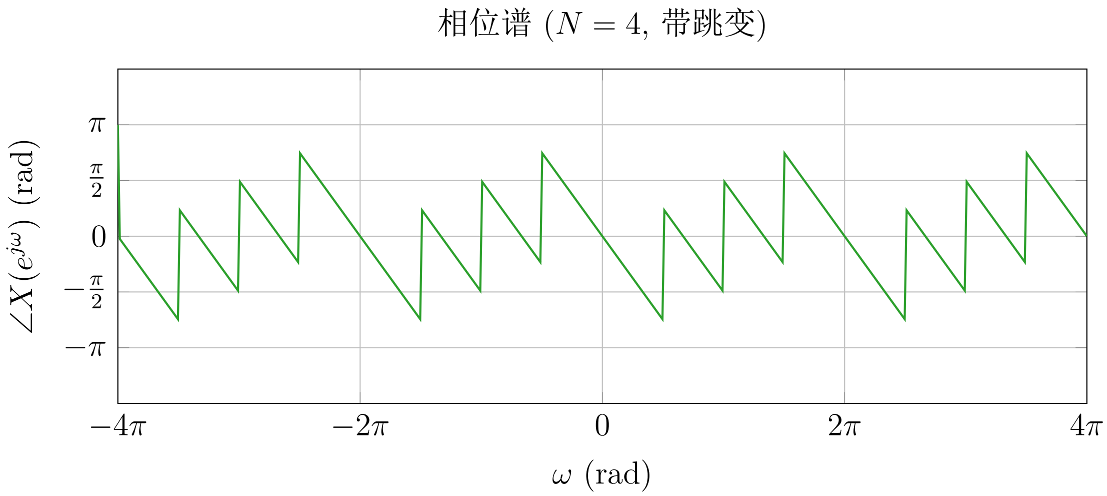

图 3: N=4 的完整相位谱，展示了线性趋势和在幅度谱零点处的 π 跳变。

3 N 值变化的动态可视化

为了更直观地理解脉冲宽度 N 对频谱的影响，我们创建一个动画，展示当 N 从 2 增加到 16 时，幅度谱和相位谱是如何相应地变化的。

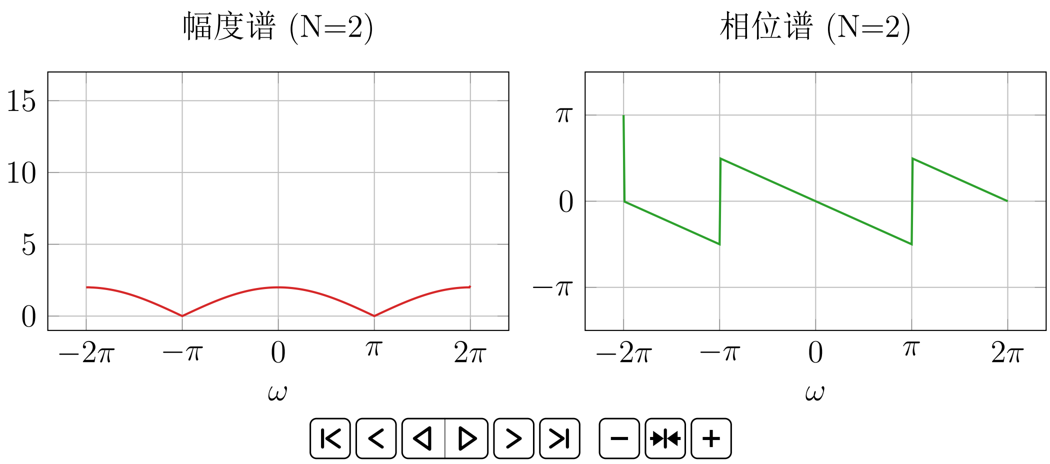

图 4: 脉冲宽度 N 从 2 增加到 16 时，幅度谱和相位谱的动态变化。请点击动画进行播放/暂停。

4 其它序列案例分析

现在我们来分析一些其它重要的离散时间序列。对于有限长度序列，我们回归到 DTFT 最根本的定义——**直接展开为加权多项式**进行计算。对于无限长度序列，则需要利用不同的数学技巧，如几何级数求和或通过更高级的变换关系来推导。

4.1 有限长度序列回顾

4.1.1 案例一：非对称序列 $x_1[n] = \{1, 2, 3, 4\}$

其 DTFT 为 $e^{-j\omega}$ 的多项式：

$$X_1(e^{j\omega}) = 1 + 2e^{-j\omega} + 3e^{-j2\omega} + 4e^{-j3\omega}$$

这是一个典型的非对称序列，其相位谱通常是非线性的。

4.1.2 案例二：对称序列 $x_2[n] = \{1, 2, 1\}$

其 DTFT 可通过提取中心相位因子简化，从而得到纯实数幅度函数与线性相位项的乘积：

$$X_2(e^{j\omega}) = 1 + 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} = e^{-j\omega}(e^{j\omega} + 2 + e^{-j\omega}) = e^{-j\omega}(2 + 2\cos(\omega))$$

这是一个典型的对称序列，其 DTFT 具有（广义）线性相位，这在滤波器设计中至关重要。

4.2 无限长度序列基础案例

4.2.1 单位冲激函数 $\delta[n]$

定义: $\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$。**DTFT 推导**:

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-j\omega n} \\ &= \cdots + 0 \cdot e^{-j\omega(-1)} + \mathbf{1} \cdot \mathbf{e^{-j\omega \cdot 0}} + 0 \cdot e^{-j\omega(1)} + \ldots \qquad \text{(求和中只有 n=0 项非零)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

结论: $\delta[n] \quad \Leftrightarrow \quad 1$。单位冲激在频域中包含所有频率分量，且幅度均为 1。

4.2.2 永恒常量 $x[n] = 1$

DTFT 推导: 这个序列的 DTFT 求和 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega n}$ 并不收敛。我们通常从傅里叶逆变换的角度来理解它。我们知道频域的冲激 $\delta(\omega)$ 对应时域的常量。由于 DTFT 是周期的，所以时域的常量对应频域的周期冲激串。**结论**:

$$1 \quad \Leftrightarrow \quad 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

这意味着一个直流信号在频域上只在 $\omega = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ 这些直流频率点上有能量。

4.2.3 单位阶跃函数 $u[n]$

定义: $u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$。**DTFT 推导**: 这个序列的求和 $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\omega n}$ 在 $\omega = 0, \pm 2\pi, \dots$ 处也不收敛。一个标准的处理方法是将其分解为直流部分和交流部分：

$$u[n] = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{直流部分}} + \underbrace{\left(u[n] - \frac{1}{2}\right)}_{\text{奇信号/交流部分}}$$

- 直流部分 $\frac{1}{2}$ 的 DTFT 是 $\frac{1}{2} \cdot 2\pi \sum_k \delta(\omega - 2\pi k) = \pi \sum_k \delta(\omega - 2\pi k)$。
- 交流部分的 DTFT 可以证明等于 $\frac{1}{1-e^{-j\omega}}$。

结论: 将两部分相加，得到：

$$u[n] \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

这个结果揭示了一个重要的特性：单位阶跃函数既有连续的频谱（第一项），又在直流频率点上有离散的谱线（第二项）。

4.2.4 单边指数序列 $a^n u[n]$ (其中 $|a| < 1$)

DTFT 推导: 这是一个经典的几何级数求和。

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} \quad \text{(由于 u[n] 的存在，求和从 0 开始)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n \quad \text{(这是一个公比为} r = ae^{-j\omega} \text{ 的无穷等比数列)} \end{aligned}$$

因为 $|a| < 1$，所以公比的模 $|ae^{-j\omega}| = |a| < 1$，级数收敛。利用无穷等比数列求和公式 $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$：

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

结论: $a^n u[n] \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$。这是设计数字 IIR 滤波器的基础。

4.2.5 复指数序列 $e^{j\omega_0 n}$

DTFT 推导: 类似于 $x[n]=1$ 的情况，这个序列的 DTFT 也是一个频域冲激串，但被搬移到了 ω_0 处。**结论**:

$$e^{j\omega_0 n} \quad \Leftrightarrow \quad 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k)$$

这意味着一个纯粹的单一频率信号，在频域上只在该频率（及其 2π 的整数倍周期延拓位置）上有谱线。

4.2.6 余弦序列 $\cos(\omega_0 n)$

DTFT 推导: 我们利用欧拉公式将余弦分解为两个复指数，然后应用线性性质。

$$\cos(\omega_0 n) = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{DTFT}\{\cos(\omega_0 n)\} &= \mathrm{DTFT}\left\{\frac{1}{2}e^{j\omega_0 n}\right\} + \mathrm{DTFT}\left\{\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\cdot 2\pi \sum_k \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k) + \frac{1}{2}\cdot 2\pi \sum_k \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi k)\end{aligned}$$

结论:

$$\cos(\omega_0 n) \quad \Leftrightarrow \quad \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi k)]$$

一个余弦信号在频域上对应于在 $+\omega_0$ 和 $-\omega_0$ 处的两个冲激（及其周期延拓）。

4.2.7 正弦序列 $\sin(\omega_0 n)$

DTFT 推导: 过程与余弦类似，但分解公式不同。

$$\sin(\omega_0 n) = \frac{1}{2j}e^{j\omega_0 n} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 n}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{DTFT}\{\sin(\omega_0 n)\} &= \frac{1}{2j}\mathrm{DTFT}\left\{e^{j\omega_0 n}\right\} - \frac{1}{2j}\mathrm{DTFT}\left\{e^{-j\omega_0 n}\right\} \\ &= \frac{2\pi}{2j} \sum_k \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k) - \frac{2\pi}{2j} \sum_k \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi k)\end{aligned}$$

结论:

$$\sin(\omega_0 n) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k) - \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi k)]$$

一个正弦信号同样对应于在 $+\omega_0$ 和 $-\omega_0$ 处的两个冲激，但它们的幅度是纯虚数。

5 DTFT 的重要性质及示例

本节我们将利用已知的 $x[n] = R_4[n]$ 及其 DTFT 来具体说明 DTFT 的一些核心性质。首先，我们回顾一下 $R_4[n]$ 的 DTFT，并将其记为 $X_R(e^{j\omega})$：

$$X_R(e^{j\omega}) = 1 + e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} + e^{-j3\omega} = e^{-j\omega\frac{3}{2}}\frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)}$$

后续所有示例都将以此为基础。

5.1 线性性质 (Linearity)

性质: 若 $y[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$，则 $Y(e^{j\omega}) = aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$。
示例: 让我们用最简单的信号来验证此性质。

- 令 $x_1[n] = \delta[n]$ (单位冲激)，其 DTFT 为 $X_1(e^{j\omega}) = 1$。
- 令 $x_2[n] = \delta[n-1]$ (移位冲激)，其 DTFT 为 $X_2(e^{j\omega}) = e^{-j\omega}$。

现在，我们构造一个新信号 $y[n] = 2x_1[n] + 3x_2[n] = 2\delta[n] + 3\delta[n-1]$。在时域上，这个信号是 $y[n] = \{2, 3\}$，在 $n = 0$ 处为 2，在 $n = 1$ 处为 3。

我们用两种方法计算其 DTFT：

1. **直接计算**: 根据 DTFT 定义直接计算 $y[n]$ 的 DTFT：

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]e^{-j\omega n} = 2 + 3e^{-j\omega}$$

2. **利用线性性质**:

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= 2X_1(e^{j\omega}) + 3X_2(e^{j\omega}) \\ &= 2 \cdot (1) + 3 \cdot (e^{-j\omega}) \\ &= 2 + 3e^{-j\omega} \end{aligned}$$

两种方法的结果完全相同，清晰地验证了线性性质。

5.2 时移性质 (Time-Shift)

性质: 若 $y[n] = x[n - n_0]$，则 $Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$。
示例: 令 $y[n] = R_4[n-2] = \{0, 0, 1, 1, 1, 1\}$。其 DTFT 为：

$$Y(e^{j\omega}) = e^{-j2\omega}X_R(e^{j\omega}) = e^{-j2\omega}\left(e^{-j\omega\frac{3}{2}}\frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)}\right) = e^{-j\omega\frac{7}{2}}\frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)}$$

时移不改变幅度谱，但会为相位谱增加一个线性项。

5.3 翻转与共轭性质 (Time-Reversal & Conjugation)

性质: 若 $y[n] = x^*[-n]$，则 $Y(e^{j\omega}) = X^*(e^{j\omega})$。

示例: 由于 $R_4[n]$ 是实数序列，我们考虑 $y[n] = R_4[-n]$。该序列在 $n = 0, -1, -2, -3$ 处为 1。其 DTFT 为：

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) = X_R^*(e^{j\omega}) &= \left(e^{-j\omega\frac{3}{2}}\frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)}\right)^* \\ &= e^{j\omega\frac{3}{2}}\frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)} \end{aligned}$$

这与 $X_R(e^{-j\omega})$ 的结果一致，验证了对于实信号，时域翻转等价于频域的 $X(e^{-j\omega})$。

5.4 时域卷积 (Convolution in Time)

性质: $x_1[n] * x_2[n] \quad \Leftrightarrow \quad X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$。

示例: 计算 $y[n] = R_4[n] * R_4[n]$。结果是三角形脉冲 $y[n] = \{1, 2, 3, 4, 3, 2, 1\}$。根据卷积定理，其 DTFT 为：

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \left(X_R(e^{j\omega})\right)^2 \\ &= \left(e^{-j\omega\frac{3}{2}}\frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)}\right)^2 \\ &= e^{-j3\omega}\left(\frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)}\right)^2 \end{aligned}$$

5.5 时域相乘/调制 (Multiplication in Time / Modulation)

性质: $x[n]y[n] \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$ (周期卷积)。

示例: 令 $y[n] = R_4[n] \cdot R_4[n]$。由于 $R_4[n]$ 的值为 0 或 1，所以 $y[n] = R_4[n]$。其 DTFT 显然是 $Y(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega})$。根据性质，这也等于：

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_R(e^{j\theta})X_R(e^{j(\omega-\theta)})d\theta = X_R(e^{j\omega})$$

5.6 频域微分 (Frequency Differentiation)

性质: $nx[n] \quad \Leftrightarrow \quad j\frac{d}{d\omega}X(e^{j\omega})$。

示例: 令 $y[n] = nR_4[n] = \{0, 1, 2, 3\}$。其 DTFT 为 $Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega} + 2e^{-j2\omega} + 3e^{-j3\omega}$。根据性质，这个结果等于：

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= j\frac{d}{d\omega}X_R(e^{j\omega}) \\ &= j\frac{d}{d\omega}\left(e^{-j\omega\frac{3}{2}}\frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)}\right) \\ &= j\left[\left(\frac{-j3}{2}\right)e^{-j\omega\frac{3}{2}}\frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)} + e^{-j\omega\frac{3}{2}}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)}\right)\right] \end{aligned}$$

虽然形式复杂，但两者在数值上是完全等价的。

5.7 对称性 (Symmetry Properties)

对于实数序列 $x[n]$，其 DTFT $X(e^{j\omega})$ 具有共轭对称性：$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$。由此可引申出：

- $x_e[n] = \frac{x[n]+x[-n]}{2}$ (偶部) $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\mathrm{Re}\{X(e^{j\omega})\}$
- $x_o[n] = \frac{x[n]-x[-n]}{2}$ (奇部) $\quad\Leftrightarrow\quad$ $j\mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\}$

示例: $R_4[n]$ 的 DTFT 实部和虚部分别为：

$$\mathrm{Re}\{X_R(e^{j\omega})\} = \cos\left(\frac{3}{2}\omega\right)\frac{\sin(2\omega)}{\sin(\frac{\omega}{2})}$$
$$j\mathrm{Im}\{X_R(e^{j\omega})\} = j\left[-\sin\left(\frac{3}{2}\omega\right)\frac{\sin(2\omega)}{\sin(\frac{\omega}{2})}\right]$$

这两个表达式分别是 $R_4[n]$ 的偶部和奇部的 DTFT。

5.8 帕斯瓦尔定理 (Parseval's Theorem)

性质: $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}|X(e^{j\omega})|^2 d\omega$。该定理表明，信号在时域计算的总能量与其在频域计算的总能量相等，能量是守恒的。

示例: 对于 $x[n] = R_4[n]$：

- **时域能量**:

$$E_{total} = \sum_{n=0}^{3}|1|^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 4$$

- **频域能量**:

$$E_{total} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|e^{-j\omega\frac{3}{2}}\frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)}\right|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)}\right)^2 d\omega = 4$$

定理成立，验证了能量守恒。

5.8.1 总能量与直流分量 (DC) 的关系

一个常见的问题是：总能量 $E = 4$ 是否与信号的直流分量（即在 $\omega = 0$ 处的峰值，$X_R(e^{j0}) = 4$）有直接关系？答案是：**有关系，但总能量不等于直流能量**。

信号的总能量可以分解为**直流分量的能量**和**所有交流分量的能量**之和。

1. **计算直流分量**: 信号的平均值（直流分量）为 $m_x = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3}x[n] = 1$。我们可以将信号分解为直流部分和交流部分：

$$x[n] = \underbrace{m_x}_{\text{直流部分}} + \underbrace{(x[n] - m_x)}_{\text{交流部分}}$$

   对于 $R_4[n]$，由于其值恒为 1，所以 $x[n] - m_x = 0$。这意味着 $R_4[n]$ 是一个**纯直流信号**，它没有任何交流分量。

2. **计算能量分量**:
   - **直流能量** (E_{DC}): $E_{DC} = N \cdot |m_x|^2 = 4 \cdot 1^2 = 4$。
   - **交流能量** (E_{AC}): $E_{AC} = \sum_{n=0}^{3} |x[n] - m_x|^2 = 0$。
3. **验证总能量**:

$$E_{total} = E_{DC} + E_{AC} = 4 + 0 = 4$$

结论: 对于 $R_4[n]$ 这个特例，其总能量恰好等于其直流能量，是因为它的交流能量为零。对于一个普通信号，例如 $y[n] = \{1, -1, 1, -1\}$，其平均值为 0（无直流分量），但其总能量为 $1^2 + (-1)^2 + 1^2 + (-1)^2 = 4$，这 4 个单位的能量完全由交流分量贡献。因此，帕斯瓦尔定理计算的是**包含所有频率成分的全部能量**，而不仅仅是直流分量的能量。

6 观察与最终结论

通过上述的详细推导、静态、动态及案例分析，我们可以得出关于 DTFT 的几个核心结论：

- **时频对偶性（不确定性原理）**：动画 4 极好地展示了这一点。时域脉冲越宽（N 增大），频域主瓣越窄，能量越集中。
- **对称性与相位**：案例和性质分析表明，时域序列的对称性决定了其相位特性。共轭对称序列具有（广义）线性相位，这是滤波器设计中的一个关键特性。
- **能量集中度与分辨率**：随着 N 的增大，矩形脉冲的能量越来越集中在 $\omega = 0$ 附近，这带来了更高的频率分辨率，即区分邻近频率的能力更强。
- **旁瓣效应（频谱泄漏）**：所有有限长度窗函数（如矩形脉冲）都会在频域产生旁瓣，这是有限观测时间的必然结果，它会导致能量“泄漏”到其它频率。

综上所述，对 DTFT 的深入分析，不仅让我们掌握了具体信号的变换方法，更重要的是，它揭示了数字信号处理中关于时频关系、对称性、窗函数效应和线性相位等一系列基本而深刻的原理。

7 从 DTFT 到 DFS/DFT：周期延拓与频域采样

到目前为止，我们讨论的 DTFT 适用于非周期序列，其结果是一个连续的频谱。然而，在计算机中我们无法处理连续函数，只能处理离散的样本点。这就引出了离散傅里叶级数 (DFS) 和离散傅里叶变换 (DFT) 的概念，它们可以被理解为对 DTFT 频谱的**采样**。

7.1 核心思想与原理

- **DTFT**: 分析**非周期**序列，得到**连续**频谱。
- **DFS**: 分析**周期**序列，得到**离散**频谱（频谱系数）。

要将两者联系起来，我们需要两步操作：

1. **时域周期延拓**: 将一个有限长度的非周期序列 $x[n]$（如 $R_4[n]$），通过以周期 N 不断复制，构造成一个周期序列 $\tilde{x}[n]$。
2. **频域采样**: 对周期序列 $\tilde{x}[n]$ 进行 DFS 分析，得到的离散频谱系数 $\tilde{X}[k]$，恰好等于原始信号 $x[n]$ 的 DTFT 在特定频率点上的采样值。

7.2 公式变形

令 $x[n]$ 是一个长度为 M 的有限长序列（在 $0 \leq n \leq M-1$ 之外为 0）。我们将其周期延拓为周期为 N 的序列 $\tilde{x}[n]$ (要求 $N \geq M$)。

$$\tilde{x}[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n-lN]$$

$\tilde{x}[n]$ 的 DFS 分析公式为：

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

由于在一个周期内 $(0 \leq n \leq N-1)$，$\tilde{x}[n] = x[n]$，上式变为：

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{M-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

我们再回顾 DTFT 的定义：$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{M-1} x[n]e^{-j\omega n}$。对比两式可以发现，DFS 系数 $\tilde{X}[k]$ 就是 DTFT $X(e^{j\omega})$ 在频率点 $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$ 上的值：

$$\tilde{\mathbf{X}}[\mathbf{k}] = \mathbf{X}(\mathbf{e}^{\mathbf{j}\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{\mathbf{N}}\mathbf{k}}$$

这就是连接 DTFT 和 DFS/DFT 的桥梁。

7.3 以 $R_4[n]$ 计算其 DFS

令 $x[n] = R_4[n] = \{1, 1, 1, 1\}$。我们选择一个周期 $N = 8$ (大于其自身长度 4) 来构造周期信号 $\tilde{x}[n]$。

$$\tilde{x}[n] = \{\ldots, \underset{\uparrow}{1}, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, \ldots\}$$

计算其 8 点 DFS 系数 $\tilde{X}[k]$ (这在实践中等同于对序列 $\{1,1,1,1,0,0,0,0\}$ 进行 8 点 DFT):

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{3} 1 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}kn} = 1 + e^{-j\frac{\pi}{4}k} + e^{-j\frac{\pi}{2}k} + e^{-j\frac{3\pi}{4}k}$$

这个结果正是 $R_4[n]$ 的 DTFT $X_R(e^{j\omega}) = 1 + e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} + e^{-j3\omega}$ 在 $\omega = \frac{\pi}{4}k$ 处的采样值。

7.4 生活化案例对比

- **DTFT: 高清模拟相机拍风景**
  想象用一台高质量的胶片相机拍摄一幅广阔的风景。得到的照片是**连续**的，包含了无限的细节。这就像 DTFT，它给出了信号最完整、最详细的频谱信息，是一个连续的函数。

- **DFS/DFT: 将照片变成像素画**
  现在，你需要在电脑上显示这张照片。你必须把它**数字化**，变成由有限个像素点组成的图像。这就像 DFS/DFT，它在连续的 DTFT 频谱上进行**采样**，得到一组离散的频谱值。像素画的分辨率（N 值）越高，采样点越密集，图像就越接近原始的连续照片。

- **时域周期延拓: 为分析节拍而循环播放音乐**
  为什么需要周期延拓？想象你听到一段 4 秒的音乐片段（如 $R_4[n]$），你想分析它的节拍（频率成分）。单独播放一次很难分析。但如果你把它**循环播放**（周期延拓），形成一段连续的音乐流，你就很容易听出并打出它的节拍了。时域的周期化是为了让频域的分析（采样）成为可能且有意义。

7.5 DFS 点数 N 的影响：补零看频谱

下面的静态对比图展示了一个关键概念：对一个固定长度的信号（我们用 $R_8[n]$）进行不同点数的 DFT（等价于 DFS），如何影响我们观察到的频谱。这在实践中通过**补零 (zero-padding)** 实现。

8 N 值变化的静态对比

为了深入理解脉冲宽度 N 对频谱的影响，我们在此展示 $N = 2, 8, 16$ 三种情况的静态对比图。

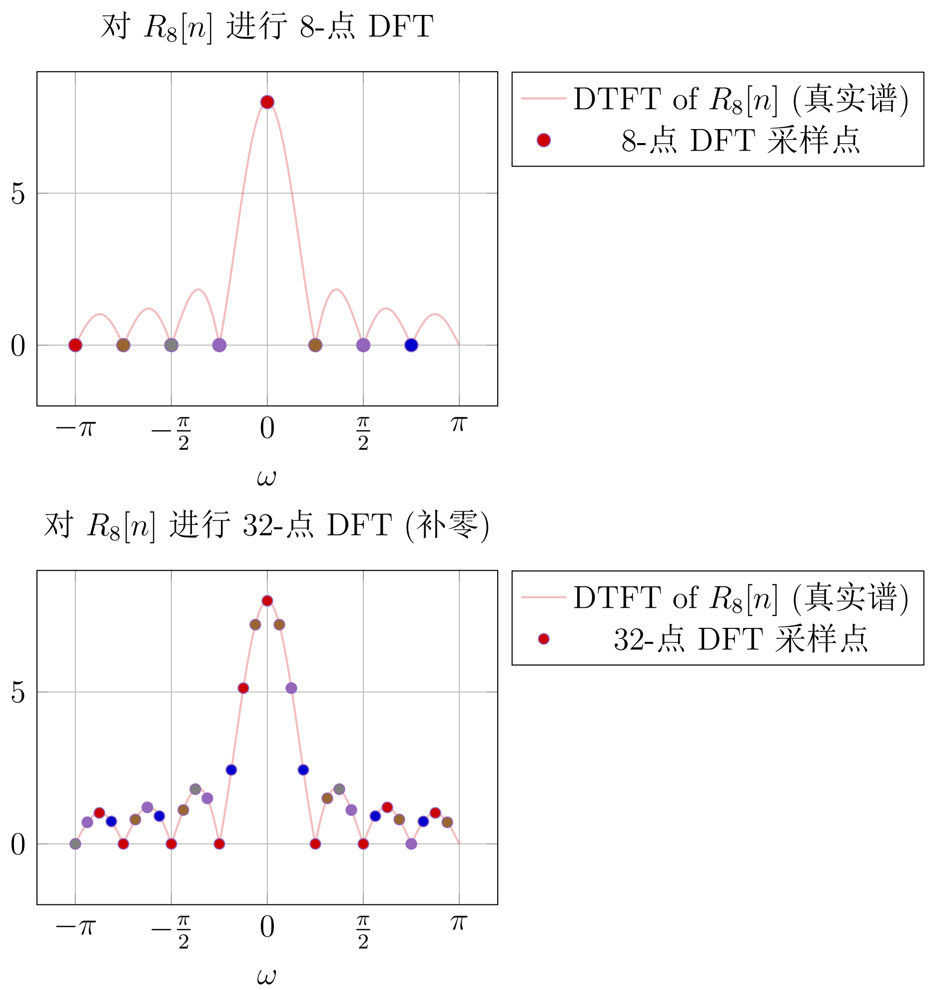

图 5: 固定信号 $R_8[n]$，对比 8 点 DFT 和 32 点 DFT 的效果。DFT 点数越多（补零越多），频域采样点越密集，越能清晰地勾勒出底层 DTFT 的形状。这说明补零不能提高真实频谱分辨率（主瓣宽度不变），但能让我们看得更清楚。

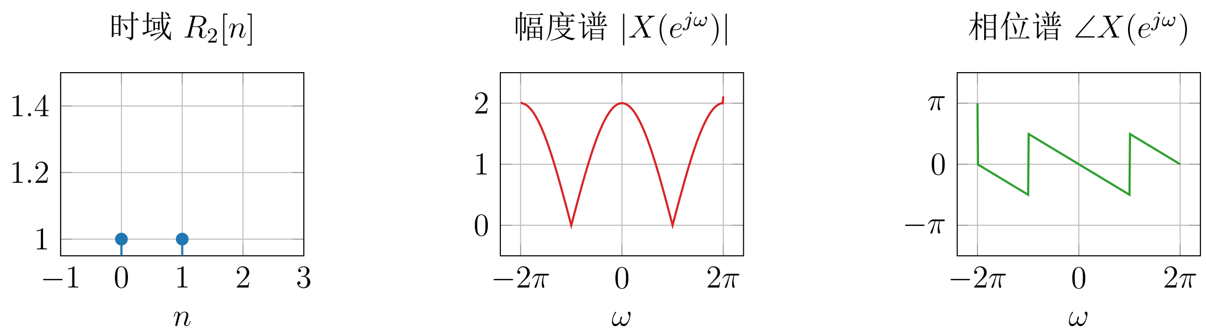

图 6: N=2 时的时域信号、幅度谱与相位谱。

8.1 N=2 时

8.2 N=8 时

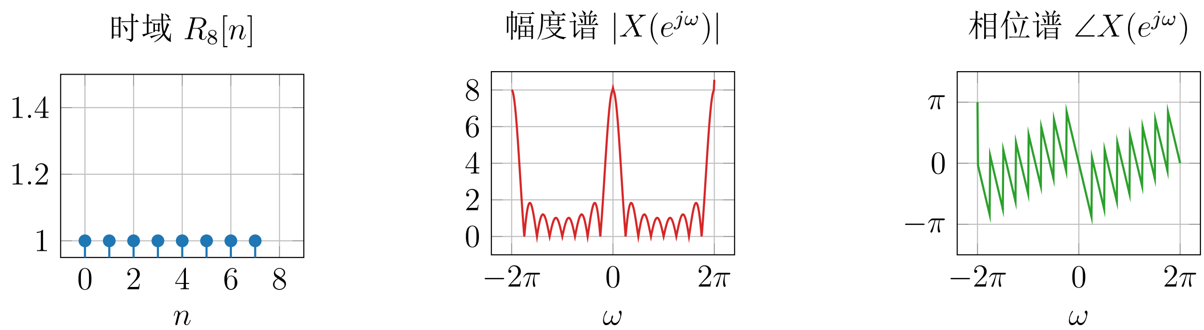

图 7: N=8 时的时域信号、幅度谱与相位谱。主瓣明显变窄。

8.3 N=16 时

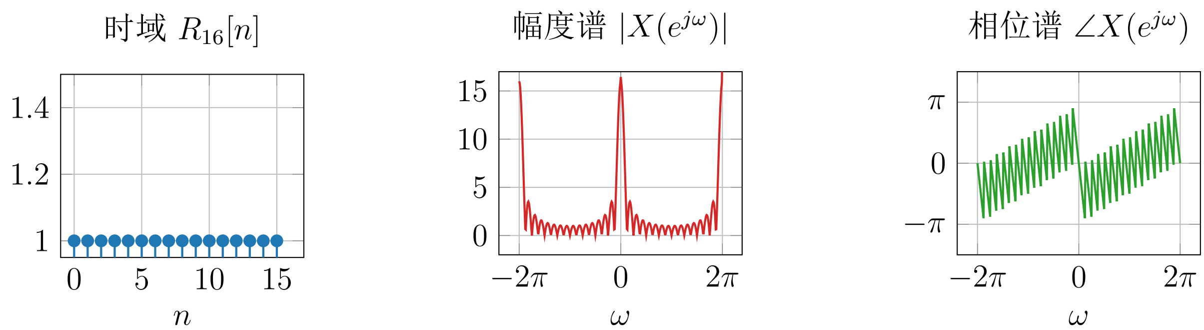

图 8: N=16 时的时域信号、幅度谱与相位谱。主瓣非常窄，相位跳变更密集。