

数字信号处理例题集

离散周期信号的频域分析

目录

- ① 例题 1: 周期序列的 DFS
- ② 例题 3: 周期卷积
- ③ 例题 7: 已知频谱求序列
- ④ 例题 12: 频域抽样定理
- ⑤ 练习题

例题 1: 周期序列的 DFS

题目: 求周期为 4 的序列 $\tilde{x}[n] = \{\dots, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ 的频谱 $\tilde{X}[k]$ 。

例题 1: 周期序列的 DFS

题目: 求周期为 4 的序列 $\tilde{x}[n] = \{\dots, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ 的频谱 $\tilde{X}[k]$ 。 **解:**

1. 写出 DFS 分析公式, 其中 $N = 4$:

$$W_4 = e^{-j\frac{2\pi}{4}} = e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$$

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^3 \tilde{x}[n] W_4^{kn}$$

例题 1：周期序列的 DFS

题目：求周期为 4 的序列 $\tilde{x}[n] = \{\dots, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ 的频谱 $\tilde{X}[k]$ 。**解：**

1. 写出 DFS 分析公式，其中 $N = 4$ ：

$$W_4 = e^{-j\frac{2\pi}{4}} = e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$$

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^3 \tilde{x}[n] W_4^{kn}$$

2. 计算各频谱分量 ($k = 0, 1, 2, 3$):

▶ **直流分量** ($k = 0$):

$$\tilde{X}[0] = \sum_{n=0}^3 \tilde{x}[n] = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

例题 1: 周期序列的 DFS

题目: 求周期为 4 的序列 $\tilde{x}[n] = \{\dots, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ 的频谱 $\tilde{X}[k]$ 。解:

1. 写出 DFS 分析公式, 其中 $N = 4$:

$$W_4 = e^{-j\frac{2\pi}{4}} = e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$$

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^3 \tilde{x}[n] W_4^{kn}$$

2. 计算各频谱分量 ($k = 0, 1, 2, 3$):

► **直流分量** ($k = 0$):

$$\tilde{X}[0] = \sum_{n=0}^3 \tilde{x}[n] = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

► **基波分量** ($k = 1$):

$$\begin{aligned}\tilde{X}[1] &= 1 \cdot W_4^0 + 2 \cdot W_4^1 + 3 \cdot W_4^2 + 4 \cdot W_4^3 \\ &= 1 + 2(-j) + 3(-1) + 4(j) = -2 + 2j\end{aligned}$$

例题 1: 周期序列的 DFS (续)

2. 计算各频谱分量 (续):

▶ **二次谐波** ($k = 2$):

$$\begin{aligned}\tilde{X}[2] &= 1 \cdot W_4^0 + 2 \cdot W_4^2 + 3 \cdot W_4^4 + 4 \cdot W_4^6 \\ &= 1 + 2(-1) + 3(1) + 4(-1) = -2\end{aligned}$$

例题 1: 周期序列的 DFS (续)

2. 计算各频谱分量 (续):

▶ 二次谐波 ($k = 2$):

$$\begin{aligned}\tilde{X}[2] &= 1 \cdot W_4^0 + 2 \cdot W_4^2 + 3 \cdot W_4^4 + 4 \cdot W_4^6 \\ &= 1 + 2(-1) + 3(1) + 4(-1) = -2\end{aligned}$$

▶ 三次谐波 ($k = 3$):

$$\begin{aligned}\tilde{X}[3] &= 1 \cdot W_4^0 + 2 \cdot W_4^3 + 3 \cdot W_4^6 + 4 \cdot W_4^9 \\ &= 1 + 2(j) + 3(-1) + 4(-j) = -2 - 2j\end{aligned}$$

例题 1: 周期序列的 DFS (续)

2. 计算各频谱分量 (续):

▶ 二次谐波 ($k = 2$):

$$\begin{aligned}\tilde{X}[2] &= 1 \cdot W_4^0 + 2 \cdot W_4^2 + 3 \cdot W_4^4 + 4 \cdot W_4^6 \\ &= 1 + 2(-1) + 3(1) + 4(-1) = -2\end{aligned}$$

▶ 三次谐波 ($k = 3$):

$$\begin{aligned}\tilde{X}[3] &= 1 \cdot W_4^0 + 2 \cdot W_4^3 + 3 \cdot W_4^6 + 4 \cdot W_4^9 \\ &= 1 + 2(j) + 3(-1) + 4(-j) = -2 - 2j\end{aligned}$$

3. 矩阵形式总结:

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}[0] \\ \tilde{X}[1] \\ \tilde{X}[2] \\ \tilde{X}[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -2 + 2j \\ -2 \\ -2 - 2j \end{bmatrix}$$

例题 3：周期卷积 (矩阵法)

题目：已知 $\tilde{x}_1[n] = \{1, 2, 1\}$, $\tilde{x}_2[n] = \{1, 2, 3\}$ ($N = 3$), 计算 $\tilde{y}[n] = \tilde{x}_1[n] \circledast \tilde{x}_2[n]$ 。

例题 3：周期卷积 (矩阵法)

题目：已知 $\tilde{x}_1[n] = \{1, 2, 1\}$, $\tilde{x}_2[n] = \{1, 2, 3\}$ ($N = 3$), 计算 $\tilde{y}[n] = \tilde{x}_1[n] \circledast \tilde{x}_2[n]$ 。

1. 周期卷积定义：

$$\tilde{y}[n] = \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{x}_1[i] \tilde{x}_2[n - i]$$

例题 3：周期卷积 (矩阵法)

题目：已知 $\tilde{x}_1[n] = \{1, 2, 1\}$, $\tilde{x}_2[n] = \{1, 2, 3\}$ ($N = 3$), 计算 $\tilde{y}[n] = \tilde{x}_1[n] \circledast \tilde{x}_2[n]$ 。

1. 周期卷积定义：

$$\tilde{y}[n] = \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{x}_1[i] \tilde{x}_2[n-i]$$

2. 构建 $\tilde{x}_2[n]$ 的循环矩阵：

$$\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} \tilde{x}_2[0] & \tilde{x}_2[2] & \tilde{x}_2[1] \\ \tilde{x}_2[1] & \tilde{x}_2[0] & \tilde{x}_2[2] \\ \tilde{x}_2[2] & \tilde{x}_2[1] & \tilde{x}_2[0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

例题 3: 周期卷积 (矩阵法)

题目: 已知 $\tilde{x}_1[n] = \{1, 2, 1\}$, $\tilde{x}_2[n] = \{1, 2, 3\}$ ($N = 3$), 计算 $\tilde{y}[n] = \tilde{x}_1[n] \circledast \tilde{x}_2[n]$ 。

1. 周期卷积定义:

$$\tilde{y}[n] = \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{x}_1[i] \tilde{x}_2[n-i]$$

2. 构建 $\tilde{x}_2[n]$ 的循环矩阵:

$$\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} \tilde{x}_2[0] & \tilde{x}_2[2] & \tilde{x}_2[1] \\ \tilde{x}_2[1] & \tilde{x}_2[0] & \tilde{x}_2[2] \\ \tilde{x}_2[2] & \tilde{x}_2[1] & \tilde{x}_2[0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

3. 进行矩阵乘法:

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}[0] \\ \tilde{y}[1] \\ \tilde{y}[2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

例题 3: 周期卷积 (图解法)

逐步计算 $\tilde{y}[n] = \sum_{i=0}^2 \tilde{x}_1[i] \tilde{x}_2[n-i]$:

- **计算** $\tilde{y}[0]$:

- ▶ 翻转平移得 $\tilde{x}_2[-i] = \{1, 3, 2\}$
- ▶ $\tilde{y}[0] = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 9$

例题 3: 周期卷积 (图解法)

逐步计算 $\tilde{y}[n] = \sum_{i=0}^2 \tilde{x}_1[i] \tilde{x}_2[n-i]$:

- **计算** $\tilde{y}[0]$:

- ▶ 翻转平移得 $\tilde{x}_2[-i] = \{1, 3, 2\}$
- ▶ $\tilde{y}[0] = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 9$

- **计算** $\tilde{y}[1]$:

- ▶ 翻转平移得 $\tilde{x}_2[1-i] = \{2, 1, 3\}$
- ▶ $\tilde{y}[1] = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 7$

例题 3: 周期卷积 (图解法)

逐步计算 $\tilde{y}[n] = \sum_{i=0}^2 \tilde{x}_1[i] \tilde{x}_2[n-i]$:

• **计算** $\tilde{y}[0]$:

- ▶ 翻转平移得 $\tilde{x}_2[-i] = \{1, 3, 2\}$
- ▶ $\tilde{y}[0] = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 9$

• **计算** $\tilde{y}[1]$:

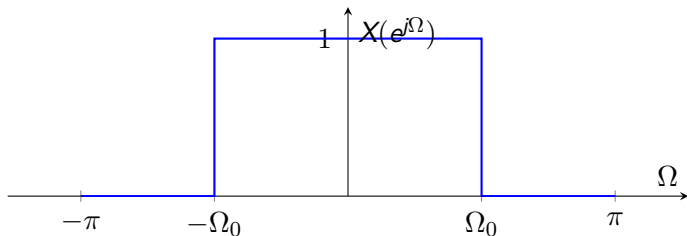
- ▶ 翻转平移得 $\tilde{x}_2[1-i] = \{2, 1, 3\}$
- ▶ $\tilde{y}[1] = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 7$

• **计算** $\tilde{y}[2]$:

- ▶ 翻转平移得 $\tilde{x}_2[2-i] = \{3, 2, 1\}$
- ▶ $\tilde{y}[2] = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 8$

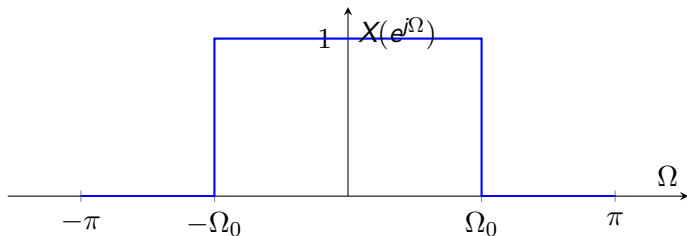
例题 7：已知频谱求序列

题目：已知理想低通滤波器的频谱 $X(e^{j\Omega})$ 如下图，求其时域序列 $x[n]$ 。



例题 7: 已知频谱求序列

题目: 已知理想低通滤波器的频谱 $X(e^{j\Omega})$ 如下图, 求其时域序列 $x[n]$ 。



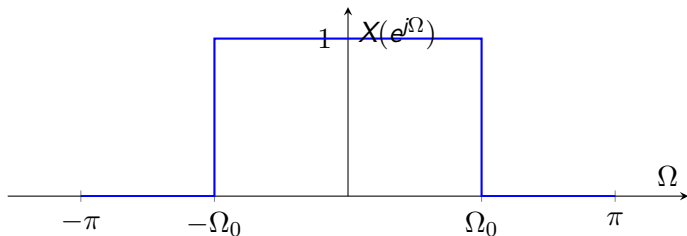
解:

1. 写出 IDTFT 定义:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega$$

例题 7：已知频谱求序列

题目：已知理想低通滤波器的频谱 $X(e^{j\Omega})$ 如下图，求其时域序列 $x[n]$ 。



解：

1. 写出 IDTFT 定义：

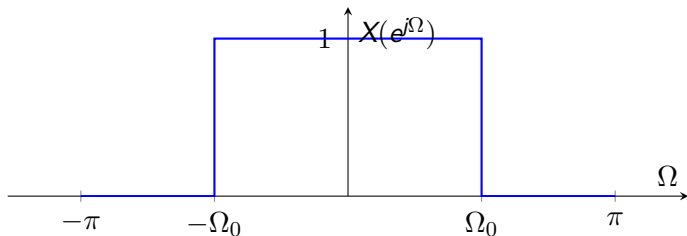
$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega$$

2. 代入矩形频谱，积分区间从 $[-\pi, \pi]$ 变为 $[-\Omega_0, \Omega_0]$ ：

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_0}^{\Omega_0} 1 \cdot e^{j\Omega n} d\Omega$$

例题 7: 已知频谱求序列

题目: 已知理想低通滤波器的频谱 $X(e^{j\Omega})$ 如下图, 求其时域序列 $x[n]$ 。



解:

1. 写出 IDTFT 定义:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega$$

2. 代入矩形频谱, 积分区间从 $[-\pi, \pi]$ 变为 $[-\Omega_0, \Omega_0]$:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_0}^{\Omega_0} 1 \cdot e^{j\Omega n} d\Omega$$

例题 7: 已知频谱求序列 (续)

解 (续):

4. 利用欧拉公式 $\sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$ 简化结果:

$$x[n] = \frac{1}{\pi n} \left(\frac{e^{j\Omega_0 n} - e^{-j\Omega_0 n}}{2j} \right) = \frac{\sin(\Omega_0 n)}{\pi n}$$

这是一个 Sinc 函数。

例题 7: 已知频谱求序列 (续)

解 (续):

4. 利用欧拉公式 $\sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$ 简化结果:

$$x[n] = \frac{1}{\pi n} \left(\frac{e^{j\Omega_0 n} - e^{-j\Omega_0 n}}{2j} \right) = \frac{\sin(\Omega_0 n)}{\pi n}$$

这是一个 Sinc 函数。

5. 特别地, 当 $n = 0$ 时, 不能直接代入上式 (分母为 0)。需回到积分式或用洛必达法则:

$$x[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_0}^{\Omega_0} e^{j\Omega \cdot 0} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_0}^{\Omega_0} 1 d\Omega = \frac{2\Omega_0}{2\pi} = \frac{\Omega_0}{\pi}$$

[返回目录](#)

例题 12: 频域抽样定理 (原理)

题目: 已知有限序列 $x[n] = \{2, 4, 7; n = 0, 1, 2\}$, 对其频谱 $X(e^{j\Omega})$ 进行 $N = 2, 3, 4$ 点抽样得 $\tilde{X}[k]$, 求时域序列 $\tilde{x}[n] = \text{IDFS}\{\tilde{X}[k]\}$ 。

例题 12：频域抽样定理 (原理)

题目：已知有限序列 $x[n] = \{2, 4, 7; n = 0, 1, 2\}$ ，对其频谱 $X(e^{j\Omega})$ 进行 $N = 2, 3, 4$ 点抽样得 $\tilde{X}[k]$ ，求时域序列 $\tilde{x}[n] = \text{IDFS}\{\tilde{X}[k]\}$ 。**核心原理：**

频域抽样定理

- 频域抽样： $\tilde{X}[k] = X(e^{j\Omega}) \Big|_{\Omega = \frac{2\pi k}{N}}$

例题 12: 频域抽样定理 (原理)

题目: 已知有限序列 $x[n] = \{2, 4, 7; n = 0, 1, 2\}$, 对其频谱 $X(e^{j\Omega})$ 进行 $N = 2, 3, 4$ 点抽样得 $\tilde{X}[k]$, 求时域序列 $\tilde{x}[n] = \text{IDFS}\{\tilde{X}[k]\}$ 。 **核心原理:**

频域抽样定理

- 频域抽样: $\tilde{X}[k] = X(e^{j\Omega}) \Big|_{\Omega = \frac{2\pi k}{N}}$
- 时域关系: 对频域抽样点做 IDFS, 等效于将原序列 $x[n]$ 以周期 N 进行周期延拓和叠加。

$$\tilde{x}[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n + lN]$$

例题 12：频域抽样定理 (原理)

题目：已知有限序列 $x[n] = \{2, 4, 7; n = 0, 1, 2\}$ ，对其频谱 $X(e^{j\Omega})$ 进行 $N = 2, 3, 4$ 点抽样得 $\tilde{X}[k]$ ，求时域序列 $\tilde{x}[n] = \text{IDFS}\{\tilde{X}[k]\}$ 。**核心原理：**

频域抽样定理

- 频域抽样： $\tilde{X}[k] = X(e^{j\Omega}) \Big|_{\Omega = \frac{2\pi k}{N}}$
- 时域关系：对频域抽样点做 IDFS，等效于将原序列 $x[n]$ 以周期 N 进行周期延拓和叠加。

$$\tilde{x}[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n + lN]$$

- 本题中，原序列长度 $L = 3$ 。

例题 12: 频域抽样定理 (情况 1: 混叠)

情况 1: 当 $N = 2$ 时 ($L > N$)

- 由于抽样点数 N 小于序列长度 L , 会发生时域混叠现象。

例题 12: 频域抽样定理 (情况 1: 混叠)

情况 1: 当 $N = 2$ 时 ($L > N$)

- 由于抽样点数 N 小于序列长度 L , 会发生时域混叠现象。
- 计算 $\tilde{x}_2[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n + 2l]$:
 - ▶ **n=0:**

$$\begin{aligned}\tilde{x}_2[0] &= \cdots + x[-2] + x[0] + x[2] + x[4] + \cdots \\ &= 0 + 2 + 7 + 0 = 9\end{aligned}$$

例题 12: 频域抽样定理 (情况 1: 混叠)

情况 1: 当 $N = 2$ 时 ($L > N$)

- 由于抽样点数 N 小于序列长度 L , 会发生时域混叠现象。
- 计算 $\tilde{x}_2[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n + 2l]$:
 - ▶ **n=0:**

$$\begin{aligned}\tilde{x}_2[0] &= \cdots + x[-2] + x[0] + x[2] + x[4] + \cdots \\ &= 0 + 2 + 7 + 0 = 9\end{aligned}$$

▶ **n=1:**

$$\begin{aligned}\tilde{x}_2[1] &= \cdots + x[-1] + x[1] + x[3] + x[5] + \cdots \\ &= 0 + 4 + 0 + 0 = 4\end{aligned}$$

例题 12: 频域抽样定理 (情况 1: 混叠)

情况 1: 当 $N = 2$ 时 ($L > N$)

- 由于抽样点数 N 小于序列长度 L , 会发生时域**混叠**现象。
- 计算 $\tilde{x}_2[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n + 2l]$:
 - ▶ **n=0:**

$$\begin{aligned}\tilde{x}_2[0] &= \cdots + x[-2] + x[0] + x[2] + x[4] + \cdots \\ &= 0 + \textcolor{red}{2} + \textcolor{red}{7} + 0 = \textcolor{red}{9}\end{aligned}$$

▶ **n=1:**

$$\begin{aligned}\tilde{x}_2[1] &= \cdots + x[-1] + x[1] + x[3] + x[5] + \cdots \\ &= 0 + \textcolor{red}{4} + 0 + 0 = \textcolor{red}{4}\end{aligned}$$

- 结果: 周期为 2 的序列 $\tilde{x}_2[n] = \{\dots, 9, 4, \dots\}$ 。原序列信息已丢失。

例题 12: 频域抽样定理 (情况 2: 无失真)

情况 2: 当 $N = 3$ 时 ($L = N$)

- 由于抽样点数 N 等于序列长度 L , 此时恰好**无混叠**, 可以无失真恢复。

例题 12: 频域抽样定理 (情况 2: 无失真)

情况 2: 当 $N = 3$ 时 ($L = N$)

- 由于抽样点数 N 等于序列长度 L , 此时恰好**无混叠**, 可以无失真恢复。
- 计算 $\tilde{x}_3[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n + 3l]$:
 - ▶ **n=0:** $\tilde{x}_3[0] = \cdots + x[-3] + x[0] + x[3] + \cdots = 0 + \textcolor{red}{2} + 0 = \textcolor{red}{2}$

例题 12: 频域抽样定理 (情况 2: 无失真)

情况 2: 当 $N = 3$ 时 ($L = N$)

- 由于抽样点数 N 等于序列长度 L , 此时恰好无混叠, 可以无失真恢复。
- 计算 $\tilde{x}_3[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n + 3l]$:
 - ▶ **n=0:** $\tilde{x}_3[0] = \cdots + x[-3] + x[0] + x[3] + \cdots = 0 + 2 + 0 = 2$
 - ▶ **n=1:** $\tilde{x}_3[1] = \cdots + x[-2] + x[1] + x[4] + \cdots = 0 + 4 + 0 = 4$

例题 12: 频域抽样定理 (情况 2: 无失真)

情况 2: 当 $N = 3$ 时 ($L = N$)

- 由于抽样点数 N 等于序列长度 L , 此时恰好无混叠, 可以无失真恢复。
- 计算 $\tilde{x}_3[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n + 3l]$:
 - ▶ **n=0:** $\tilde{x}_3[0] = \cdots + x[-3] + x[0] + x[3] + \cdots = 0 + 2 + 0 = 2$
 - ▶ **n=1:** $\tilde{x}_3[1] = \cdots + x[-2] + x[1] + x[4] + \cdots = 0 + 4 + 0 = 4$
 - ▶ **n=2:** $\tilde{x}_3[2] = \cdots + x[-1] + x[2] + x[5] + \cdots = 0 + 7 + 0 = 7$

例题 12: 频域抽样定理 (情况 2: 无失真)

情况 2: 当 $N = 3$ 时 ($L = N$)

- 由于抽样点数 N 等于序列长度 L , 此时恰好**无混叠**, 可以无失真恢复。
- 计算 $\tilde{x}_3[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n + 3l]$:
 - ▶ **n=0:** $\tilde{x}_3[0] = \cdots + x[-3] + x[0] + x[3] + \cdots = 0 + \textcolor{red}{2} + 0 = \textcolor{red}{2}$
 - ▶ **n=1:** $\tilde{x}_3[1] = \cdots + x[-2] + x[1] + x[4] + \cdots = 0 + \textcolor{red}{4} + 0 = \textcolor{red}{4}$
 - ▶ **n=2:** $\tilde{x}_3[2] = \cdots + x[-1] + x[2] + x[5] + \cdots = 0 + \textcolor{red}{7} + 0 = \textcolor{red}{7}$
- 结果: $\tilde{x}_3[n] = \{\dots, 2, 4, 7, \dots\}$, 主值周期与原序列完全相同。

[返回目录](#)

例题 12：频域抽样定理 (情况 3：补零)

情况 3：当 $N = 4$ 时 ($L < N$)

- 由于抽样点数 N 大于序列长度 L ，无混叠，相当于对原序列补零以达到新周期。

例题 12：频域抽样定理 (情况 3：补零)

情况 3：当 $N = 4$ 时 ($L < N$)

- 由于抽样点数 N 大于序列长度 L ，无混叠，相当于对原序列补零以达到新周期。
- 计算 $\tilde{x}_4[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n + 4l]$:
 - ▶ $\tilde{x}_4[0] = x[0] = 2$
 - ▶ $\tilde{x}_4[1] = x[1] = 4$
 - ▶ $\tilde{x}_4[2] = x[2] = 7$

例题 12：频域抽样定理 (情况 3：补零)

情况 3：当 $N = 4$ 时 ($L < N$)

- 由于抽样点数 N 大于序列长度 L ，无混叠，相当于对原序列补零以达到新周期。
- 计算 $\tilde{x}_4[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n + 4l]$:
 - ▶ $\tilde{x}_4[0] = x[0] = 2$
 - ▶ $\tilde{x}_4[1] = x[1] = 4$
 - ▶ $\tilde{x}_4[2] = x[2] = 7$
 - ▶ $\tilde{x}_4[3] = x[3] + x[7] + \dots = 0 + 0 + \dots = 0$ (补零)

例题 12：频域抽样定理 (情况 3：补零)

情况 3：当 $N = 4$ 时 ($L < N$)

- 由于抽样点数 N 大于序列长度 L ，无混叠，相当于对原序列补零以达到新周期。
- 计算 $\tilde{x}_4[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n + 4l]$:
 - ▶ $\tilde{x}_4[0] = x[0] = 2$
 - ▶ $\tilde{x}_4[1] = x[1] = 4$
 - ▶ $\tilde{x}_4[2] = x[2] = 7$
 - ▶ $\tilde{x}_4[3] = x[3] + x[7] + \dots = 0 + 0 + \dots = 0$ (补零)
- 结果： $\tilde{x}_4[n] = \{\dots, 2, 4, 7, 0, \dots\}$ 。

[返回目录](#)

练习题

- ① 求序列 $x[n] = \{1, -1, 2, -2; n = 0, 1, 2, 3\}$ 的 DFS 频谱 $\tilde{X}[k]$ ($N = 4$)。

练习题

- ① 求序列 $x[n] = \{1, -1, 2, -2; n = 0, 1, 2, 3\}$ 的 DFS 频谱 $\tilde{X}[k]$ ($N = 4$)。
- ② 已知 $x[n] = 0.5^n u[n]$, 求:
 - (a) $X(e^{j\Omega})$
 - (b) $|X(e^{j0})|$ 和 $|X(e^{j\pi})|$
 - (c) 利用 Parseval 定理计算 $\sum_{n=0}^{\infty} (0.5)^{2n}$

练习题

- ① 求序列 $x[n] = \{1, -1, 2, -2; n = 0, 1, 2, 3\}$ 的 DFS 频谱 $\tilde{X}[k]$ ($N = 4$)。
- ② 已知 $x[n] = 0.5^n u[n]$, 求:
 - (a) $X(e^{j\Omega})$
 - (b) $|X(e^{j0})|$ 和 $|X(e^{j\pi})|$
 - (c) 利用 Parseval 定理计算 $\sum_{n=0}^{\infty} (0.5)^{2n}$
- ③ 证明: 若 $x[n]$ 是实偶序列, 则其 DTFT $X(e^{j\Omega})$ 也是实偶函数。

练习题

- ① 求序列 $x[n] = \{1, -1, 2, -2; n = 0, 1, 2, 3\}$ 的 DFS 频谱 $\tilde{X}[k]$ ($N = 4$)。
- ② 已知 $x[n] = 0.5^n u[n]$, 求:
 - (a) $X(e^{j\Omega})$
 - (b) $|X(e^{j0})|$ 和 $|X(e^{j\pi})|$
 - (c) 利用 Parseval 定理计算 $\sum_{n=0}^{\infty} (0.5)^{2n}$
- ③ 证明: 若 $x[n]$ 是实偶序列, 则其 DTFT $X(e^{j\Omega})$ 也是实偶函数。
- ④ 已知有限长序列 $x[n]$ 长度为 $L = 5$, 要使频域抽样后能无失真恢复原序列, 问抽样点数 N 至少为多少?

练习题

- ① 求序列 $x[n] = \{1, -1, 2, -2; n = 0, 1, 2, 3\}$ 的 DFS 频谱 $\tilde{X}[k]$ ($N = 4$)。
- ② 已知 $x[n] = 0.5^n u[n]$, 求:
 - (a) $X(e^{j\Omega})$
 - (b) $|X(e^{j0})|$ 和 $|X(e^{j\pi})|$
 - (c) 利用 Parseval 定理计算 $\sum_{n=0}^{\infty} (0.5)^{2n}$
- ③ 证明: 若 $x[n]$ 是实偶序列, 则其 DTFT $X(e^{j\Omega})$ 也是实偶函数。
- ④ 已知有限长序列 $x[n]$ 长度为 $L = 5$, 要使频域抽样后能无失真恢复原序列, 问抽样点数 N 至少为多少?
- ⑤ 计算周期序列 $\tilde{x}[n] = \{\dots, 1, 2, 1, 2, \dots\}$ (周期 $N = 2$) 与 $\tilde{h}[n] = \{\dots, 1, 1, 1, 1, \dots\}$ (周期 $N = 2$) 的周期卷积。